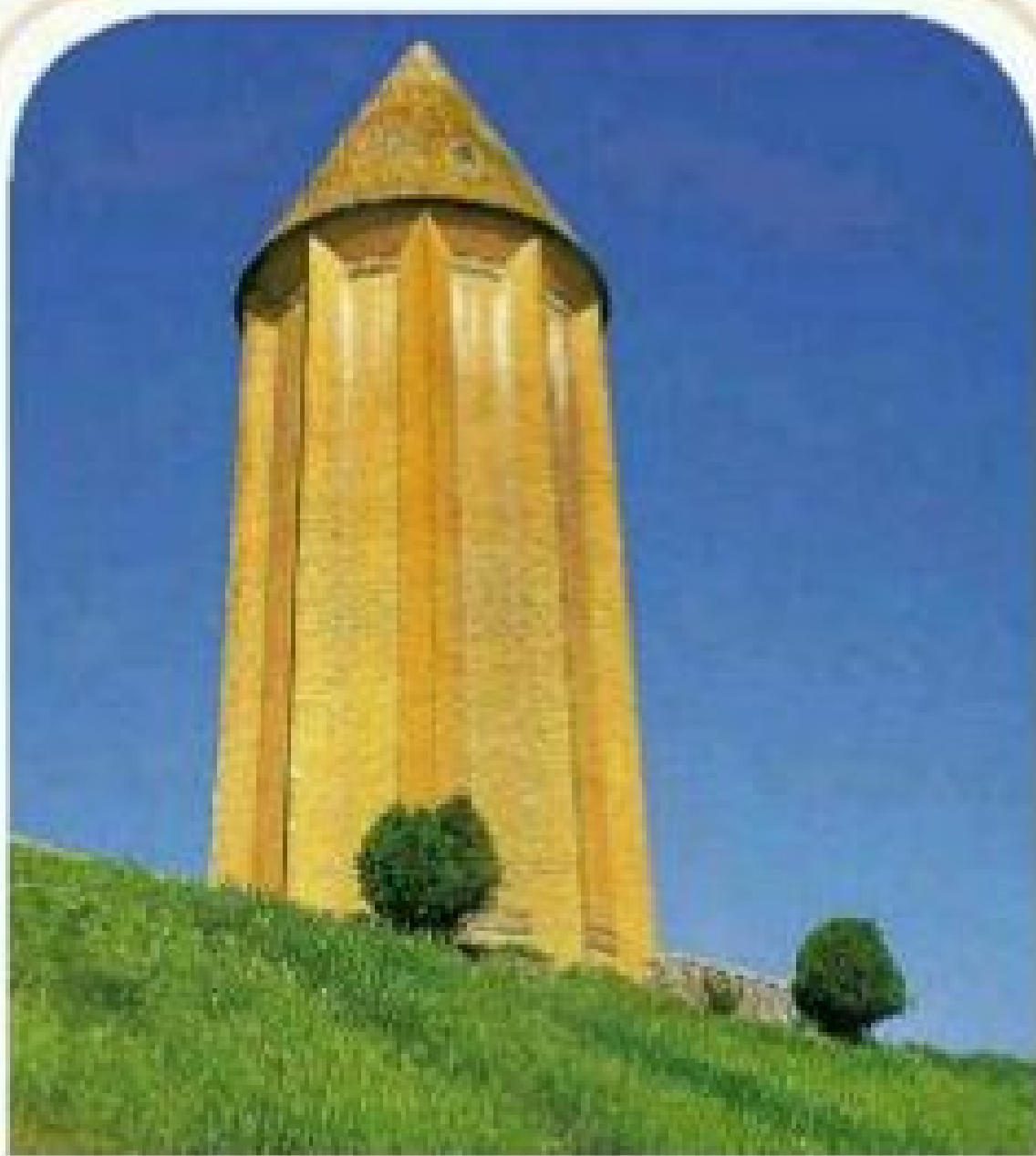




حجم و مساحت



کنبد قابوس یکی از سده چهارم هجری است که در شهر گنبد قابوس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شمار می‌رود. این برج استوانه‌ای که گنبدی مخروطی شکل روی آن قرار گرفته است ۳۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل منشور روی بنده استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شطرنج این فصل با اجزای استوانه مخروط و منشور آشنا می‌شود.

درس اول: حجم و مساحت کره

در سال‌های قبل با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شد: منشوری، کروی و هرمی.



کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کروی است. چند نمونه دیگر از حجم‌های کروی را نام ببرید. پرتقال - هندوانه - گردو

فعالیت

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.

با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.



فاصله آن نقاط از

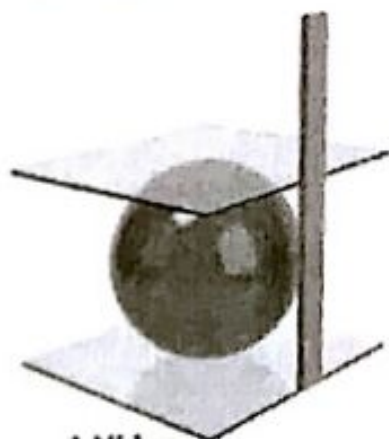
مرکز

کره مجموعه نقاطی از فضا است که به یک اندازه ثابت هستند. به این اندازه ثابت شعاع کره می‌گوییم.

۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت، راه محاسبه حجم کره را پیدا کنیم.

• یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.

• مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر کره را اندازه بگیرید.





● مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به طوری که توب کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن معاس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب R نشان دهید.

$$2R = \text{ارتفاع استوانه}$$

$$R = \text{شعاع قاعده استوانه} \quad \text{حجم استوانه} = \pi R^2 \times h = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$$

● توب را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را ببرد تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود با دو نیم کره، فضای باقیمانده بر از آب می‌شود.



- ✗ الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟ $\frac{4}{3}$ برابر
- ✗ ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟ $\frac{5}{4}$ را برابر یا $\frac{3}{4}$
- ✗ ج) بنابراین حجم کره $\frac{2}{3}$ برابر حجم استوانه است.
- د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد، دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به دست آورید.

حجم کره‌ای به شعاع R از دستور $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ به دست می‌آید.

کار در کلاس

$$R = 5, h = 10$$

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتیمتر محاط شده است.

$$\text{الف) } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500}{3}\pi$$

الف) حجم کره را به دست آورید.

$$\text{ب) } V = Sh = \pi \times 5^2 \times 2 \times 5 = 250\pi$$

ب) حجم استوانه را به دست آورید.

$$\text{ج) } V_{\text{فضای بین کره و استوانه}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = 250\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{250}{3}\pi$$

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را به دست آورید.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi \times 10^3 = \frac{2000}{3}\pi$$



۱- مانند شکل مقابل، نیم کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بپوشاند.

این دو دایره کاغذی را هر طور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حد امکان، کاغذها روی هم قرار نگیرد و سطح نیم کره نیز دیده نشود!

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بپوشانید؟ بله در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید. در بعضی ها کاغذ چرور می شود



۲- ثابت می‌شود که مساحت رویه یک نیم کره به شعاع R، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).
الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با: $2\pi R^2$
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با: $4\pi R^2$

مساحت یک کره به شعاع R برابر است با: $S = 4\pi R^2$

کار در کلاس



۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع ۱۰ سانتیمتر را پیدا کنید. $2\pi R^2 = 2\pi \times 10^2 = 400\pi$

* ۲- می‌خواهیم یک نیم کره چوبی توپر به شعاع ۱۰ سانتیمتر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت

رنگ شده را پیدا کنید. $S = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 3 \times \pi \times 10^2 = 300\pi$

بین محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی توپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟

در مساحت نیم کره چوبی توپر برابر مساحت دایره هر یک ۱۳۳ ولی در مساحت عرق چین

۲ برابر مساحت دایره محاسب می‌شود

ع) $S = 4\pi R^2 = 4\pi (4,2 \times 10^4)^2 = 4\pi \times 17,64 \times 10^8 = 1,73184 \times 10^9 \pi$
 $S = 4\pi R^2 = 4\pi (4,2 \times 10^4)^2 = 4\pi \times 17,64 \times 10^8 = 1,73184 \times 10^9 \pi$ مترمربع
 $\frac{1,73184 \times 10^9 \pi}{1,73184 \times 10^9 \pi} = \frac{1,73184}{1,73184 \times 10^9 \pi} = 0,0001 = 1,2 \times 10^{-3}$
 $1,2 \times 10^{-3} \times 10^9 = 1,2 \times 10^6$

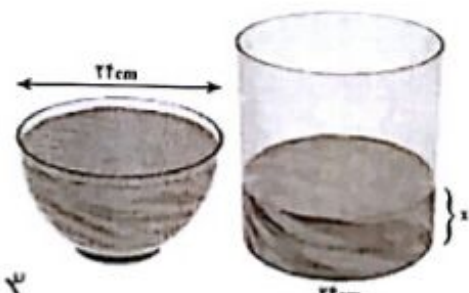
تمرین

۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.
 الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.
 ب) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب متر با نماد علمی بنویسید.
 ج) مساحت تقریبی روزه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.
 د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱/۶۴۸۰۰۰ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

استوانه $h = 1,073 = 1,073 \text{ m}$
 $V = \pi \times 7^2 \times 1,073 = 1,673 \pi$
 $V = \frac{4}{3} \pi \times 7^3 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{3} \pi \times 343 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{3} \pi \times 85,75 = 1,143 \pi$
 $V = 1,673 \pi + 1,143 \pi = 2,816 \pi$
 حجم کیسول



۲- یک کیسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کیسول ۶۰ سانتیمتر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کیسول را بر حسب متر مکعب به دست آورید.
 $R = 30 \text{ m}$
 $h = 1 \text{ m}$
 اگر بخواهیم سطح کل این کیسول را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد. دریا مس



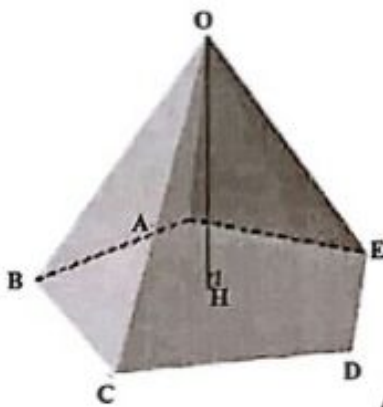
۳- پیمانه ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه ۲۴ سانتیمتر را از آب پر و آب بر و آب آن را در لیوانی استوانه ای شکل با همان قطر خالی می کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می آید؟

حجم آب = $\frac{4}{3} \pi \times 12^3 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{3} \pi \times 1728 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{3} \pi \times 432 = 576 \pi$
 $\Rightarrow r = \frac{\frac{4}{3} \pi \times 12^3}{\pi \times 12^2} = \frac{4}{3} \times 12 = 16$
 ارتفاع آب = ۱۶

مساحت ۲ قسمت ب
 مساحت نیم کره = $2\pi R^2 \times \frac{1}{2} = 2\pi \times 7^2 = 98\pi$
 مساحت جانبی استوانه = $2\pi R \times h = 2\pi \times 7 \times 1,073 = 14,99 \pi$
 مساحت دایره قاعده = $\pi R^2 = \pi \times 7^2 = 49\pi$
 مساحت کل = $98\pi + 14,99\pi + 49\pi = 161,99 \pi$
 لیتر گرم = $161,99 \pi \times 100 = 16199 \pi$



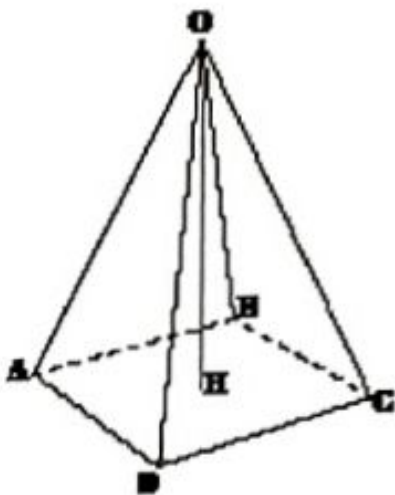
یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. سه نمونه دیگر از شکل‌های هرمی را نام ببرید. چادری، عشتار، پالت سیر
پاستوریزه سوس، کوه‌ها، درختان کاج -



هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند. در هرم مقابل نام رأس: ... تعداد وجه‌ها: ... شکل وجه‌ها: ... شکل قاعده: ... نام قاعده: ABCDE.

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در شکل، OH بر قاعده ABCDE عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری هرم از رأس شروع می‌کنیم؛ به عنوان مثال هرم بالا به صورت OABCDE خوانده می‌شود.

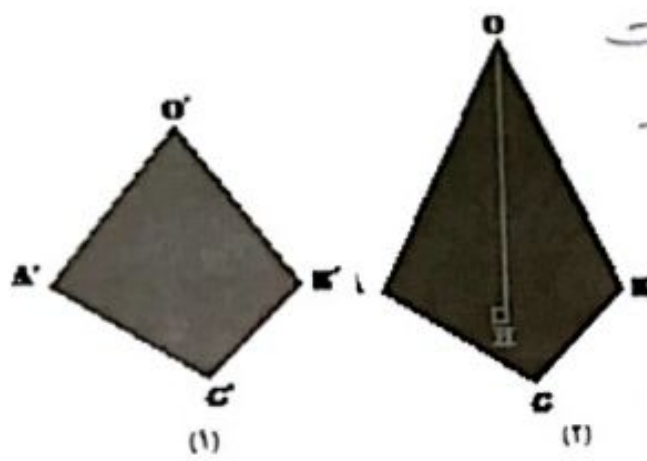
فعالیت



۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشد، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل: نام رأس: ... ارتفاع: OH ... شکل قاعده: ... وجه‌های جانبی: ... تعداد وجه‌ها: ...

درج

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در



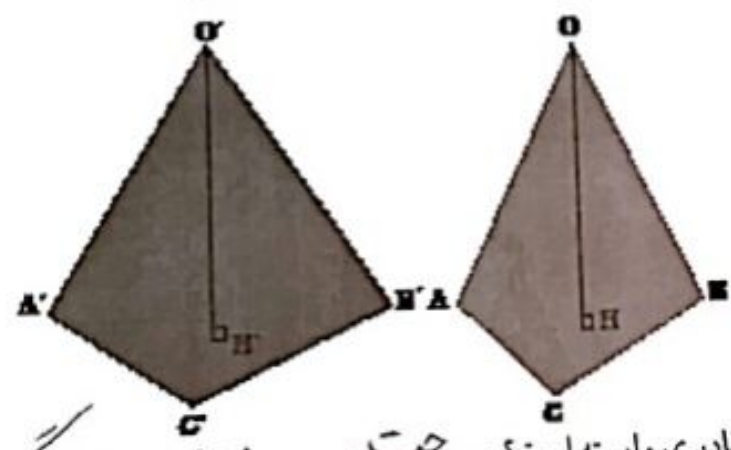
نقطه
شکل های (1) و (2) مثلث های قاعده هم نه

شکلند

$$O'H' < OH \Rightarrow V' < V$$

در شکل های (3) و (4) ارتفاع ها برابر است

۵/۵
✗

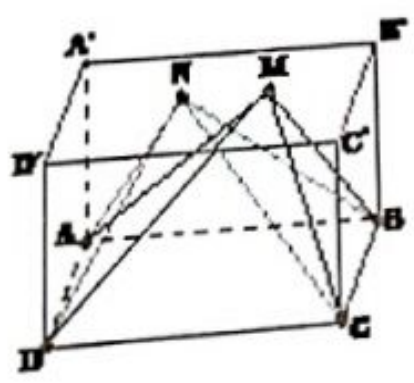


$$S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' > V$$

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟ به مساحت قاعده و ارتفاع بستگی دارد.
 ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه حدسی می زنید؟ از قاعده و ارتفاع مثلث - به قاعده و ارتفاع مثلث و ارتفاع هرم
 د) اگر دو هرم دارای قاعده های با مساحت مساوی و ارتفاع های مساوی باشند، درباره حجم های آنها چه می توانید بگویید؟ حجم ها برابر می شوند.

اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های آنها با هم برابر است.

کار در کلاس



در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل (A'B'C'D') است. چرا هرم های MABCD و NABCD دارای حجم های یکسان است؟ به این ترتیب چند هرم می توان ساخت که با هرم های بالا حجم یکسان داشته باشند؟

۱۳۶

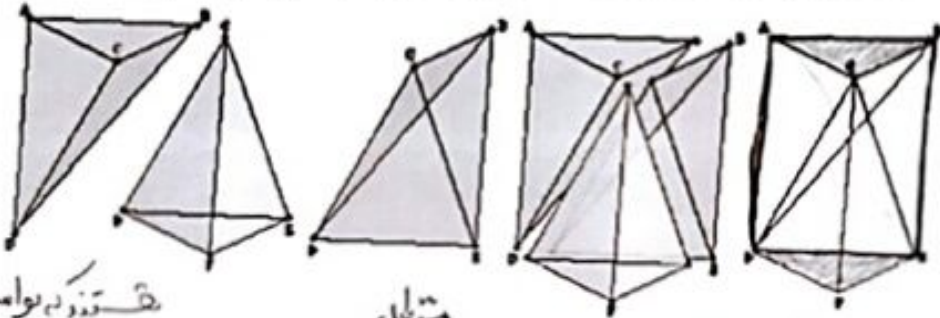
- چون دارای قاعده و ارتفاع برابر می باشند.

بسیار هرم که با تغییر نقطه های M و N می توان حجم های متفاوت داشت.

شکلیت

محاسبه حجم هرم

در شکل زیر، منشور با دو فاعده \hat{ABC} و \hat{DEF} را ملاحظه می کنید. نقطه C را به نقطه های E و D و نقطه B را به نقطه D وصل می کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.



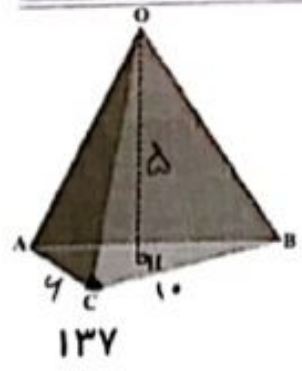
نقطه D را به واسطه قطر مسطح ایجاد کنید

- ۱- چهار ضلعی ABED، چه نوع چهار ضلعی است؟ چرا مثلث های ABD و BDE هم مساحت دارند؟ چون دو مثلث هرم هستند.
- ۲- چرا هرم های CBAD و CBED دارای حجم های برابر است؟ چون قاعده منشور و مثلث های عمود مثلث BDE و ABD هم مساحت دارند.
- ۳- چرا مثلث های DEF و ABC هم مساحت دارند؟ چون دو قاعده منشورند و یک هم برابرند.
- ۴- چرا هرم های CDEF و DABC دارای حجم های برابر است؟ چون قاعده ها هم مساحت دارند و ارتفاع ها هم برابرند.
- ۵- با توجه به پاسخ سؤالات ۱ و ۲ چه نتیجه ای می گیریم؟ این هرم های CBAD، CBED و CDEF دارای حجم های برابرند.

حجم هر هرم با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}(\pi R^2 h)$$

کار در کلاس



در شکل مقابل هرم OABC دارای قاعده ABC است که در آن $AC = 6\text{cm}$ و $BC = 10\text{cm}$ و زاویه $\hat{ACB} = 90^\circ$ و ارتفاع OH ارتفاع هرم مساوی 5cm است. با کامل کردن عبارات های زیر حجم هرم را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{4 \times 10}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 20 \times 9 = 60 \text{ cm}^3$$

فعالیت

در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰ cm و M وسط BC است.

۱- باره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟ عمود منصف BC

۲- مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ قائم‌الزاویه

۳- اگر طول ضلع قاعده، ۱۲ cm باشد به کمک قضیه فیثاغورس $OM^2 = OB^2 - MB^2$
در مثلث OBM طول OM را حساب کنید. $OM = 8 \text{ cm}$ $OM^2 = 10^2 - 4^2 = 96$

۴- مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟ قائم‌الزاویه

۵- به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را

به دست آورید. $OH = 2\sqrt{7}$

۶- حجم هرم OABCD را به دست آورید.

هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و جال تعداد ضلع‌های این چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ دایره - مخروط



دایره - مخروط

مخروط، شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.



از اینجا نتیجه می شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می آید:

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

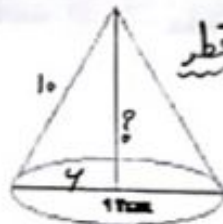
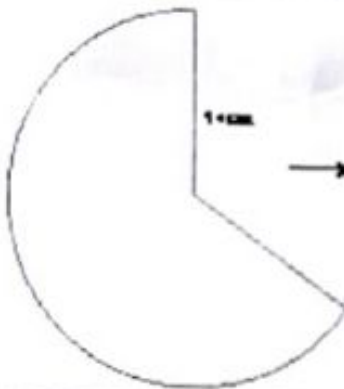


کار در کلاس

$$h^2 = 10^2 - 4^2$$

$$h^2 = 100 - 16 = 84$$

$$h = \sqrt{84}$$



علی با قسمتی از دایره به شعاع 10 cm مخروطی به قطر قاعده 12 cm ساخته است. حجم مخروط را به دست آورید. $R = 4$

* پاسی

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times \sqrt{84} = 94 \pi \text{ cm}^3$$

تمرین

$$V = \frac{1}{3} \times 5 \times 4 \times 10 = 100 \text{ cm}^3$$

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد 5 و 6 سانتیمتر و ارتفاع آن 10 سانتیمتر باشد.

$$V = \frac{1}{3} S h$$

۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن 4 cm باشد و وجه های جانبی آن مثلث های متساوی الساقینی به ساق های 8 cm باشد. در این

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 12$$

$$V = 48 \pi$$

طرف مخروطی



۳- طرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه 4 cm و به ارتفاع 12 cm را از آب برمی کنیم و در لیوانی استوانه ای شکل، که شعاع قاعده آن 6 cm است، خالی می کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می آید؟

$$V = S h = 4 \pi h$$

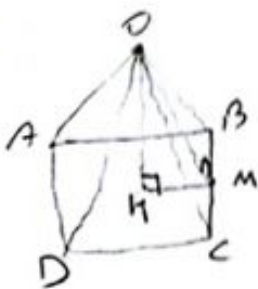
$$48 \pi = 36 \pi h$$

$$h = \frac{48}{36} = 1.33 \text{ cm}$$

* شعاع = 4

۱۳۹

۲



$$OM^2 = OB^2 - BM^2$$

$$OM^2 = 1^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$OM = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$OH^2 = OM^2 - MH^2$$

$$OH^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$OH = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h =$$

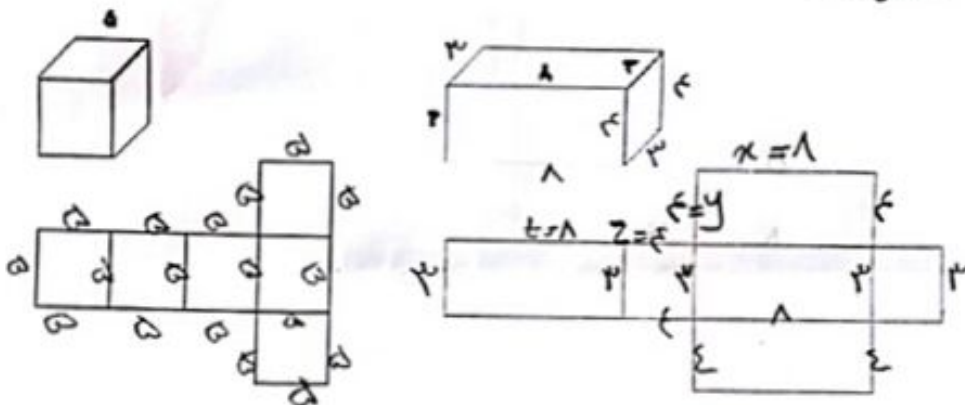
$$V = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 2\sqrt{14}$$

$$= \frac{32\sqrt{14}}{3} \text{ cm}^3$$

مثال

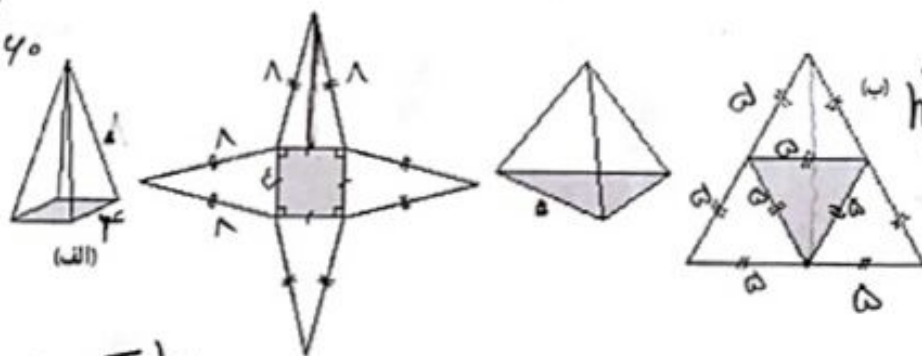
۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام

مشخص کنید.

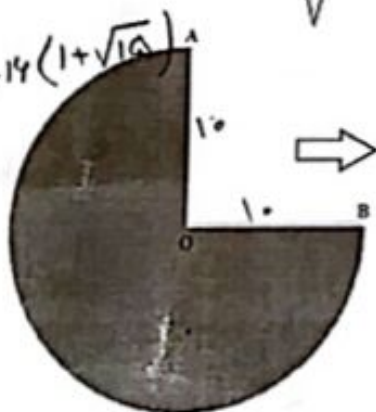


۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

$S = \epsilon \times \epsilon = 14$ (تایده)
 $h^2 = 1^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$
 $h = \sqrt{0} = 0$
 $S = \frac{\epsilon \times 2\sqrt{15} \times \epsilon}{2}$
 $= 14\sqrt{15}$
 $S_{total} = 14 + 14\sqrt{15} = 14(1 + \sqrt{15})$



$h^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$
 $h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$
 $S = \frac{5\sqrt{3} \times 10}{2} = 25\sqrt{3}$



۲- $\frac{2}{3}$ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را برداشته‌ایم؛ با کمک آن یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟ چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید. با هم برابرند

$P = 2R\pi = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$

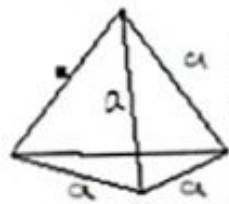
$20\pi \div 4 = 5\pi$

طول کمان AB = 5π

محیط $P = 5\pi$

$5\pi = 2\pi R$

شعاع قاعده مخروط $R = \frac{5}{2} = 2.5$

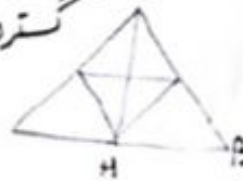


۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید که طول همه بال های آن 'a' است.

$$OH = OB' - BH$$

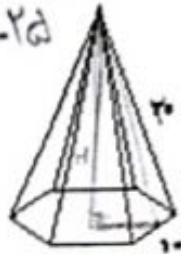
$$OH^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$OH = a\sqrt{3}, S = \frac{a\sqrt{3} \times 2a}{2} = a^2\sqrt{3}$$



$$h^2 = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375$$

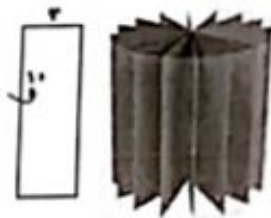
$$h = \sqrt{375}$$



۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده منش ضلعی منتظم و اندازه بال هرم، مساحت جانبی هرم را پیدا کنید.

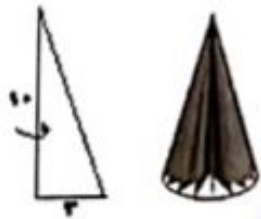
$$= \frac{4 \times \sqrt{375} \times 10}{2} = 20\sqrt{375} \approx 580,9$$

فعالیت



۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می آید؟ استوانه

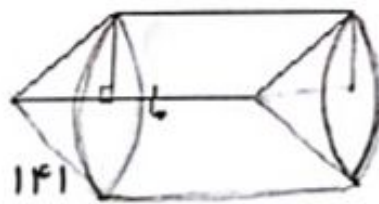
شعاع قاعده شکل حاصل: ... ارتفاع شکل حاصل: ...



۲- اگر مثلث قائم الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل، دوران دهیم، چه شکلی به دست می آید؟ حجم آن را پیدا کنید. مخروط

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi 3^2 \times 10 = 30\pi$$

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.

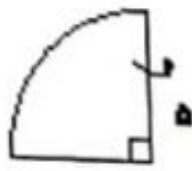


کره حاصل می شود



شکل لدا در دست می شود

استوانه که در سمت راست آن مخروطی خالی شده و در سمت چپ به همان اندازه مخروطی اضافه شده



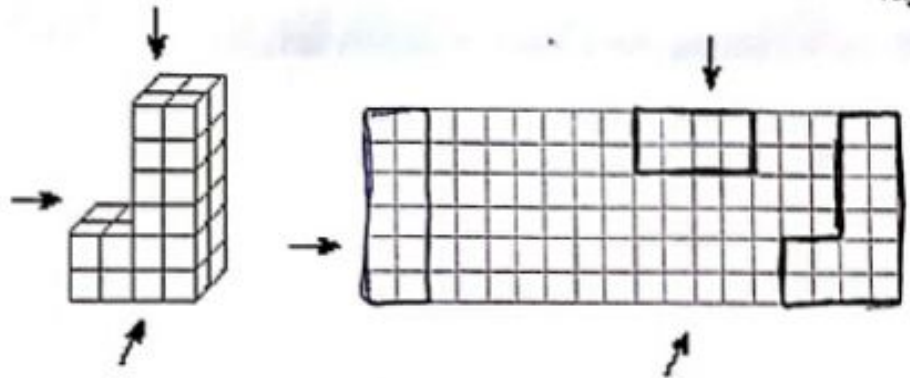
حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع 5cm را حول شعاع آن پیدا کنید
 شماره حاصل می شود

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \pi \times 5^3$$

$$= \frac{250 \cdot \pi}{3}$$

فعالیت

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت های مشخص شده را رسم کنید.



* ۲- اگر هر کدام از هرم های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می شود؟

الف) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی (ب) هرم منتظم با قاعده مربع (ج) هرم منتظم با قاعده مثلث مثلث مساوی و مربع
 الف شش ضلعی



۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟ دایره - اگر دو نیم کره مساوی تقسیم شود



۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

از نیم کره با کمانه انداز ۱/۵ آن برداشته شده
 ۱۴۲ پس $\frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ از کره می ماند.

کار در کلاس



یک اسفنج مکعب شکل به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده ایم. سطح بریده شده به چه شکلی متغیل است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

$$x^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$x = a\sqrt{2} \quad \text{طول مستطیل}$$

$$a = \text{عرض مستطیل}$$

تشریح

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

① مکعب به ضلع a
② کره به شعاع a

③ استوانه به ارتفاع و شعاع قاعده a

④ استوانه به ارتفاع و قطر قاعده a

$$\frac{a}{2} \text{ شعاع}$$



$$S = \pi a a = \pi a^2$$

$$S = 2 \times \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{2}$$

$$\frac{V}{S} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$$

$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$

$$V = \pi a^3$$

$$S = 2\pi a^2$$

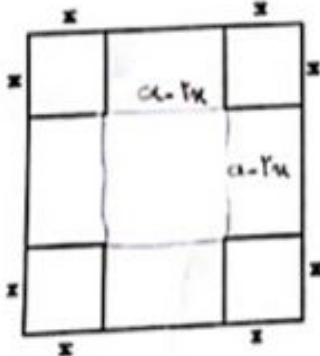
$$V = \frac{\pi a^3}{4}$$

$$S = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح $(\frac{V}{S})$ را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟

شکل دوم

۲- از یک مقوا به ضلع a گوشه های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده ایم. چه رابطه ای بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد.



$$a - 2x = 4x$$

$$a = 4x + 2x = 6x$$



س با a برابر $6x$ باشد.